



# Penerapan Metode Elemen Batas *Dual Reciprocity* (Mebdr) Pada Saluran Irigasi Jalur

Jahring, Nasruddin

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Program Studi Matematika, Universitas Sembilanbelas  
November Kolaka, Kolaka, Indonesia  
Email: jahring.usn@gmail.com, nasruddin.math@gmail.com

## Abstrak

Di dalam paper ini, akan dibahas mengenai Metode Elemen Batas *Dual Reciprocity* (MEBDR) untuk masalah infiltrasi stasioner dari berbagai tipe saluran yang berbeda-beda pada saluran irigasi periodik pada tanah homogen. Infiltrasi stasioner pada tanah homogen dibangun dari Persamaan Richards. Persamaan Richards ini kemudian ditransformasikan menjadi Persamaan Helmholtz termodifikasi. Selanjutnya dengan DRBEM, solusi numerik dari Persamaan Helmholtz termodifikasi diperoleh. Menggunakan solusi numerik yang diperoleh, dapat dihitung nilai numerik dari *suction potential*.

**Kata Kunci:** Infiltrasi, Saluran Periodik, Metode Elemen Batas, *Dual Reciprocity*, Irigasi Jalur, *Suction Potential*

## 1. PENDAHULUAN

Air merupakan unsur yang sangat diperlukan oleh tanaman dan segala hal yang berkaitan dengan kegiatan pertanian. Dengan ketersediaan air yang cukup dapat menjadi faktor pendukung meningkatnya hasil pertanian. Namun tidak dapat dipungkiri, tidak setiap daerah atau lahan pertanian memiliki ketersediaan air yang cukup. Hal itu disebabkan oleh curah hujan yang rendah sehingga akan sangat sulit untuk memenuhi kebutuhan air tanaman. Berkaitan dengan hal tersebut di atas, sistem irigasi dipandang perlu untuk mengatasi masalah lahan pertanian dengan intensitas air yang kurang. Adanya sistem irigasi diharapkan dapat mempertahankan tingkat kadar air yang cukup tinggi dalam tanah sehingga akar tanaman dapat mengekstrak air dari tanah secara efisien.

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, banyak penelitian yang sudah dilakukan berkaitan dengan infiltrasi pada saluran irigasi. Salah satunya adalah penelitian [4] tentang penerapan metode elemen batas *dual-reciprocity* pada saluran irigasi jalur dengan saluran yang dilengkapi dengan lapisan impermeabel. Namun pada kenyataannya bahwa saluran yang ada di lapangan tidak hanya saluran irigasi jalur dengan lapisan impermeabel, tetapi juga saluran irigasi jalur tanpa lapisan impermeabel. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan mengembangkan penelitian sebelumnya dengan menambahkan beberapa saluran irigasi jalur tanpa lapisan impermeabel yang dirangkum dalam satu judul "Penerapan Metode Elemen Batas *Dual Reciprocity* pada Saluran Irigasi Jalur"

## 2. METODOLOGI PENELITIAN

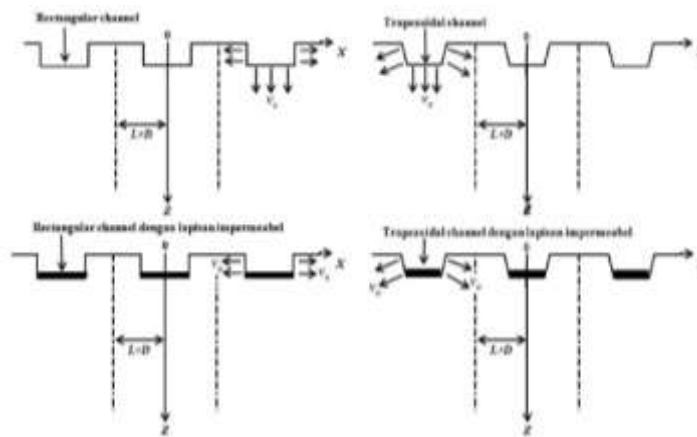
### 2.1 Formulasi Masalah

Berikut akan diberikan formulasi masalah infiltrasi dari berbagai saluran-saluran irigasi jalur yang berbeda pada tanah yang homogen, yaitu:

- Rectangular channel* dengan dan tanpa lapisan impermeabel
- Trapezoidal channel* dengan dan tanpa lapisan impermeabel.

Selanjutnya akan ditentukan domain dari masing-masing saluran irigasi di atas. Dalam menentukan domain saluran irigasi, perlu diberikan asumsi-asumsi tertentu yaitu:

- Panjang penampang masing-masing saluran irigasi adalah sama yaitu  $2L$
- Saluran sangat panjang
- Jarak antar saluran adalah sama yaitu  $2D$ , atau jarak antar titik tengah saluran adalah sama yaitu  $2(L+D)$
- Saluran selalu dipenuhi air
- Infiltrasi pada permukaan saluran irigasi konstan yaitu  $v_0$
- Tidak ada infiltrasi pada permukaan tanah di luar saluran irigasi
- Tidak ada infiltrasi pada permukaan saluran impermeabel.



Gambar 1. Saluran Irigasi Jalur [4]

Dengan sifat simetris, dapat didefinisikan domain yaitu  $0 \leq X \leq L+D$  dan  $Z \geq 0$  yang dinyatakan dengan  $R$  dengan batas  $C$ , dan tidak ada fluks pada  $X = 0$  dan  $X = L+D$ .

## 2.2 Persamaan Fundamental

Untuk masalah infiltrasi stasioner, persamaan yang sering digunakan adalah persamaan Richards, yang merupakan persamaan differensial parsial non linear yang merepresentasikan perpindahan air dalam tanah tak jenuh dalam dua dimensi [1] adalah:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( K \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( K \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) = \frac{\partial K}{\partial Z} \dots\dots\dots(1)$$

dengan  $K$  adalah konduktivitas hidrolik tanah tak jenuh dan  $Z > 0$  mengarah ke bawah secara vertical.

Menurut [1] dalam makalahnya menjelaskan potensial fluks matrik  $\Theta$  dihubungkan dengan konduktivitas hidrolik oleh Persamaan

$$\Theta = \int_{-\infty}^{\psi} K(q) dq \dots\dots\dots(2)$$

Hubungan antara konduktivitas hidrolik  $K$  dari tanah tak jenuh (*unsaturated soil*) dan konduktivitas hidrolik  $K_0$  dari tanah jenuh (*saturated soil*) didefinisikan sebagai

$$K = K_0 e^{\alpha \psi}, \quad \alpha > 0, \dots\dots\dots(3)$$

dengan  $\psi$  adalah *suction potential* dan  $\alpha$  adalah suatu konstanta empiris.

Menggunakan Persamaan (2) dan (3) diperoleh bentuk linear dari Persamaan (1) yaitu

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} = \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \dots\dots\dots(4)$$

Komponen fluks ke arah horizontal dan vertikal adalah

$$U = -\frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad \text{dan} \quad V = \alpha \Theta - \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \dots\dots\dots(5)$$

Fluks normal pada permukaan tanah dengan vektor normal terhadap batas domain yang mengarah keluar domain dengan  $n = (n_1, n_2)$  diberikan oleh

$$F = -\frac{\partial \Theta}{\partial X} n_1 + \left( \alpha \Theta - \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \right) n_2 \dots\dots\dots(6)$$

Didefinisikan peubah-peubah tak berdimensi sebagai berikut

$$x = \frac{\alpha}{2} X; \quad z = \frac{\alpha}{2} Z; \quad \Phi = \frac{\pi \Theta}{v_0 L}; \quad u = \frac{2\pi}{v_0 \alpha L} U; \quad v = \frac{2\pi}{v_0 \alpha L} V; \quad f = \frac{2\pi}{v_0 \alpha L} F, \dots\dots\dots(7)$$

dan mensubstitusikan  $\Phi = \phi e^z$  ke Persamaan (4) diperoleh suatu Persamaan berbentuk Persamaan Helmholtz termodifikasi, yaitu

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \phi \dots\dots\dots(8)$$

Fluks tak berdimensi diperoleh

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \phi n_2 - fe^{-z} \dots\dots\dots(9)$$

Fluks pada permukaan saluran adalah  $v_0$  dan besar fluks tak berdimensi adalah  $2\pi/\alpha L$ . Sehingga syarat batas pada permukaan saluran permeabel adalah

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{2\pi}{\alpha L} e^{-z} + \phi n_2 \dots\dots\dots(10)$$

Metode elemen batas *Dual Reciprocity* (MEBDR) digunakan untuk mencari solusi numerik Persamaan (8). Pada tahap selanjutnya, mencari solusi numerik dengan MEBDR dibutuhkan suatu Persamaan integral yang disebut Persamaan integral batas (*Boundary integral equation*) yaitu

$$\lambda(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta) = \int_C \left[ \phi(x, z) \frac{\partial \Phi(x, z; \xi, \eta)}{\partial n} - \Phi(x, z; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, z)}{\partial n} \right] ds(x, z) + \iint_R \Phi(x, z; \xi, \eta) \phi(x, z) dx dz \dots\dots\dots(11)$$

dengan solusi fundamental persamaan Laplace dua dimensi

$$\Phi(x, z; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\eta)^2} \dots\dots\dots(12)$$

dan

$$\lambda(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{Jika } (\xi, \eta) \notin R \cup C \\ \frac{1}{2}, & \text{Jika } (\xi, \eta) \text{ berada pada bagian } \textit{smooth} \text{ kurva } C \\ 1, & \text{Jika } (\xi, \eta) \in R. \end{cases} \dots\dots\dots(13)$$

Persamaan integral (11) dapat diselesaikan secara numerik dengan mendiskritisasi batas domain menggunakan ruas-ruas garis yang berhubungan satu sama lain dengan ujung-ujungnya terletak pada kurva  $C$  dan mendiskritisasi domain dengan titik kolokasi interior. Misalkan ruas-ruas garis tersebut  $C^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  sehingga jumlah ruas garis sebanyak  $N$  ruas garis. Pada setiap  $C^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , dipilih titik tengahnya sebagai titik kolokasi (*collocation points*) yang dituliskan dengan  $(a^{(1)}, b^{(1)})$ ,  $(a^{(2)}, b^{(2)})$ , ...,  $(a^{(N)}, b^{(N)})$  dan titik-titik kolokasi interior (*interior points collocation*) sebanyak  $L$  titik yang dapat dituliskan dengan  $(a^{(N+1)}, b^{(N+1)})$ , ...,  $(a^{(N+L)}, b^{(N+L)})$ . Misalkan  $(\xi, \eta) = (x^{(n)}, y^{(n)})$  untuk  $n=1, 2, \dots, N+L$ , maka aproksimasi dapat dituliskan sebagai

$$\lambda(x^{(n)}, y^{(n)}) \phi^{(n)} = \sum_{j=1}^{N+L} \mu^{(nj)} + \sum_{k=1}^N \left( \phi^{(k)} F_2^{(k)}(x^{(n)}, y^{(n)}) - p^{(k)} F_1^{(k)}(x^{(n)}, y^{(n)}) \right) \dots\dots(14)$$

dengan  $\phi^{(n)} = (x^{(n)}, y^{(n)})$  ( $n=1, 2, \dots, N+L$ ) dan

$$\mu^{(nj)} = \sum_{m=1}^{N+L} \omega^{(mj)} \Psi(x^{(n)}, y^{(n)}; x^{(m)}, y^{(m)}), \dots\dots\dots(15)$$

$$F_1^{(k)}(\xi, \eta) = \int_{C^{(k)}} \Phi(x, z; \xi, \eta) ds(x, z), \dots\dots\dots(16)$$

$$F_2^{(k)}(\xi, \eta) = \int_{C^{(k)}} \left[ \frac{\partial \Phi(x, z; \xi, \eta)}{\partial n} \right] ds(x, z). \dots\dots\dots(17)$$

dan

$$\Psi(\xi, \eta; a, b) = \lambda(\xi, \eta) \chi(x, y; a, b) + \sum_{k=1}^N \left[ n_x^{(k)} \frac{\partial \chi(x, y; a, b)}{\partial x} + n_y^{(k)} \frac{\partial \chi(x, y; a, b)}{\partial y} \right]_{(x,y)=(x^{(k)}, y^{(k)})} \dots\dots(18)$$

$$F_1^{(k)}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N \chi(x^{(k)}, y^{(k)}; a, b) F_2^{(k)}(\xi, \eta). \dots\dots\dots(19)$$

$$\omega^{(mj)} = \left[ \rho(x^{(j)}, y^{(j)}; x^{(m)}, y^{(m)}) \right]^{-1} \dots\dots\dots(20)$$

dengan

$$\rho(x, z; a^{(m)}, b^{(m)}) = 1 + r^2(x, z; a^{(m)}, b^{(m)}) + r^3(x, z; a^{(m)}, b^{(m)}),$$

$$\chi(x, z; a^{(m)}, b^{(m)}) = \frac{1}{4}r^2(x, z; a^{(m)}, b^{(m)}) + \frac{1}{16}r^4(x, z; a^{(m)}, b^{(m)}) + \frac{1}{25}r^5(x, z; a^{(m)}, b^{(m)}),$$

$$r(x, z; a^{(m)}, b^{(m)}) = \sqrt{(x - a^{(m)})^2 + (z - b^{(m)})^2} \dots\dots (21)$$

MEBDR digunakan untuk memperoleh solusi numerik ( $\phi$ ), dan menggunakan Persamaan berikut untuk memperoleh *suction potential* ( $\psi$ ) [4].

$$\psi = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{\alpha v_0 L \phi e^z}{\pi K_0} \right) \dots\dots\dots (22)$$

Untuk memperoleh *water content* ( $\theta$ ) digunakan Persamaan [4]

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[ \frac{1}{1 + (\alpha \psi)^n} \right]^m \dots\dots\dots (23)$$

dengan  $\theta_r$  dan  $\theta_s$  adalah *water content* residual dan jenuh,  $\alpha$ ,  $n$  dan  $m = 1 - (1/n)$  adalah parameter yang bergantung pada jenis tanah.

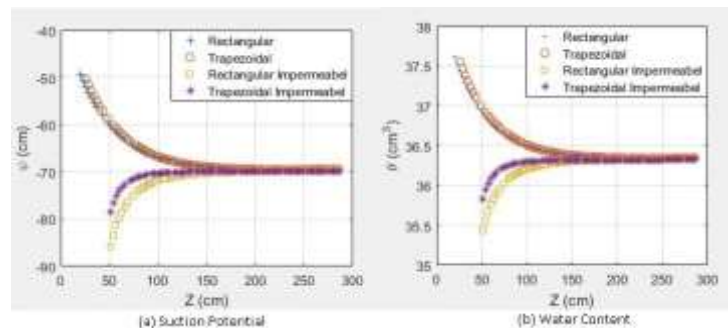
### 3. ANALISA DAN PEMBAHASAN

MEBDR diterapkan pada masalah infiltrasi stasioner pada beberapa saluran periodik yang berbeda-beda pada tanah homogen dan dipilih jenis tanah Pima clay loam (PCL) dengan nilai  $\alpha$  dan  $K_0$  masing-masing  $0.014 \text{ cm}^{-1}$  dan  $9.9 \text{ cm/hari}$  [4], [5], [6],  $\theta_r = 0.095 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\theta_s = 0.41 \text{ cm}^{-1}$  dan  $n = 1,31 \text{ cm}^{-1}$  [7], dan nilai  $v_0$  adalah 75% dari nilai  $K_0$  [2]. Selanjutnya ukuran dari tiap-tiap saluran *non-flat impermeabel* dapat dipilih sedemikian sehingga panjang permukaan saluran sama yaitu  $L = 50 \text{ cm}$  dan  $D = 50 \text{ cm}$ . Menggunakan nilai  $L$  tersebut, maka lebar saluran *non-flat* adalah  $200/\pi \text{ cm}$  dengan kedalaman  $(50 - 100/\pi) \text{ cm}$  untuk saluran *rectangular*,  $75/\pi \text{ cm}$  untuk saluran *trapezoidal*, serta masing-masing  $50 \text{ cm}$  dan  $49.5625 \text{ cm}$  untuk saluran *rectangular* dan *trapezoidal* dengan lapisan impermeabel. Selanjutnya MEBDR diimplementasikan dalam bahasa pemrograman MATLAB.

Pada MEBDR banyaknya segmen garis ( $N$ ) dan titik interior ( $M$ ) berpengaruh terhadap keakuratan solusi numerik yang dihasilkan. Berikut diberikan jumlah segmen garis dan titik interior [4]

1. Saluran *rectangular* diberikan  $N = 203$  dan  $M = 625$
2. Saluran *trapezoidal* diberikan  $N = 202$  dan  $M = 619$
3. Saluran *rectangular* impermeabel diberikan  $N = 208$  dan  $M = 609$
4. Saluran *trapezoidal* impermeabel diberikan  $N = 209$  dan  $M = 609$

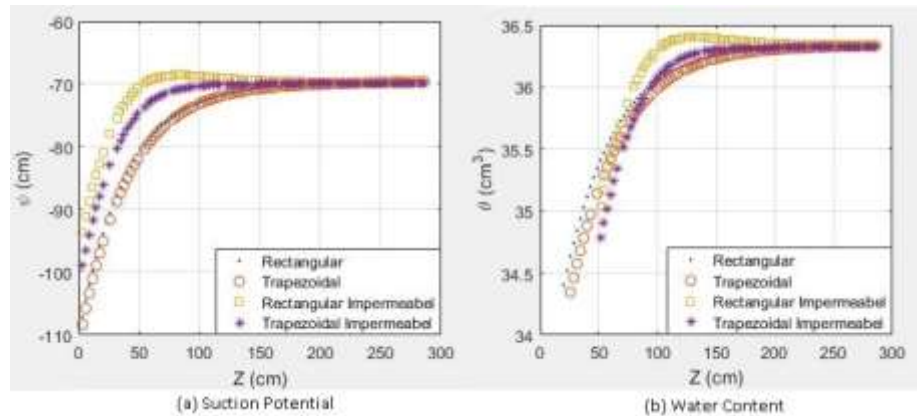
Selanjutnya variasi nilai  $\psi$  dan  $\theta$  dengan kedalaman ( $Z$ ) pada jarak yang berbeda-beda dari pusat saluran ( $X$ ) secara geometri dapat dilihat pada Gambar 2 berikut ini.



Gambar 2. *Suction potential* dan *water content* dari berbagai saluran pada  $X = 15$

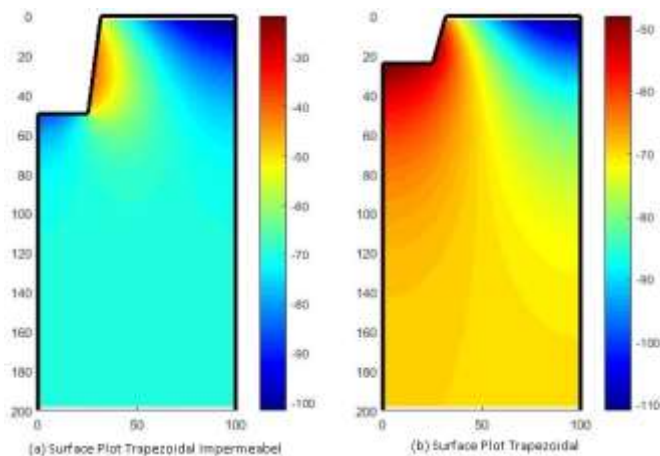
Dari Gambar 2(a) yaitu pada  $X = 15$  yang terletak di bawah saluran, nilai  $\psi$  untuk semua jenis saluran permeabel menurun terhadap  $Z$ . Ini menunjukkan *water content* di bawah saluran pada bagian dangkal lebih besar dari bagian terdalam, sehingga perembesan air semakin ke dalam semakin kecil.

Ini didukung dengan nilai  $\theta$  yang semakin menurun (lihat Gambar 2(b)). Untuk saluran impermeabel nilai  $\psi$  meningkat terhadap  $Z$ . Ini menunjukkan bahwa *water content* di bawah saluran pada bagian dangkal lebih kecil dari pada bagian terdalam sehingga perembesan air semakin ke dalam semakin besar. Hal ini didukung dengan nilai  $\theta$  yang semakin menurun (lihat Gambar 2(b)) yang menunjukkan bahwa kandungan air semakin ke bawah semakin besar. Ini dikarenakan posisi  $X = 15$  terletak di bawah saluran impermeabel sehingga berdasarkan asumsi awal tidak ada infiltrasi.



Gambar 3. *Suction potential* dan *water content* dari berbagai saluran pada  $X = 85$

Pada  $X = 85$ , nilai  $\psi$  meningkat terhadap  $Z$  (Gambar 3(a)). Ini menunjukkan bahwa kandungan air (*water content*) pada permukaan tanah paling rendah dibandingkan pada semua bagian tanah di dalam domain. Hal ini juga ditunjukkan pada Gambar 3(b) dengan nilai  $\theta$  yang semakin meningkat. Ini karena adanya asumsi awal bahwa pada permukaan tanah di luar saluran tidak ada aliran air yang masuk ke dalam tanah.



Gambar 4. Distribusi nilai  $\psi$  pada saluran *rectangular* dengan lapisan impermeabel

Dari Gambar 7(a) di atas, terlihat jelas distribusi nilai  $\psi$ . Pada bagian dangkal di bawah permukaan saluran memiliki nilai  $\psi$  paling besar di antara bagian yang lain dan terus menurun menuju ke titik ke konvergenannya. Ini menunjukkan bahwa kandungan air (*water content*) di bawah permukaan paling besar dibandingkan dengan bagian lain. Pada bagian di bawah permukaan tanah di luar saluran yang tidak jauh dari saluran terlihat semua nilai  $\psi$  hampir sama. Ini menunjukkan bahwa kandungan air (*water content*) hampir sama pada semua bagian kedalaman tanah. Selanjutnya pada bagian di bawah permukaan tanah di luar saluran yang merupakan titik terjauh dari pusat saluran dan di bawah permukaan saluran impermeabel memiliki nilai  $\psi$  yang paling rendah dibandingkan dengan bagian yang lain dan terus meningkat menuju titik ke konvergenannya pada kedalaman tertentu. Hal ini menunjukkan bahwa di bawah permukaan tanah di luar saluran pada posisi jauh



dari pusat saluran dan di bawah permukaan saluran impermeabel memiliki kandungan air (*water content*) paling rendah dibandingkan dengan bagian tanah yang lain dalam domain.

Dari Gambar 7(b) di atas, terlihat jelas distribusi nilai  $\psi$ . Pada bagian dangkal di bawah permukaan saluran memiliki nilai  $\psi$  paling besar diantara bagian yang lain dan terus menurun menuju titik kekonvergenannya. Artinya bahwa kandungan air di bawah permukaan saluran paling besar dari bagian lain. Pada bagian di bawah permukaan tanah di luar saluran yang merupakan titik terjauh dari pusat saluran dan di bawah permukaan saluran impermeabel memiliki nilai  $\psi$  paling rendah dari yang lain dan terus meningkat menuju titik kekonvergenannya. Artinya bahwa di bawah permukaan tanah di luar saluran yang jauh dari pusat saluran dan di bawah permukaan saluran impermeabel memiliki kandungan air paling rendah dari bagian yang lain di dalam tanah.

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa MEBDR dapat diterapkan pada masalah infiltrasi stasioner pada berbagai saluran baik tanpa lapisan impermeabel maupun dengan lapisan impermeabel yang berbeda-beda pada tanah yang homogen. Dari beberapa jenis saluran yang dibandingkan, maka saluran yang paling baik adalah saluran *trapezoidal* tanpa lapisan impermeabel. Karena selain mudah untuk membuatnya, juga memiliki kandungan air (*water content*) dan serta *suction potential* paling baik.

#### REFERENCES

- [1] Azis, M.I., Clements, D.L., Lobo, M., 2003, *A Boundary Element Method for Steady Infiltration from Periodic Channels*, ANZIAM J. 44:C61-C78.
- [2] Basha, H.A., 1999, *Multidimensional Linearized Nonsteady Infiltration with Prescribed Boundary Conditions at the Soil Surface*, Water Resources Research, 35(1):75-83.
- [3] Batu, V., 1977, *Steady Infiltration from a Ditch; Theory and Experiment*, Soil Sci, Soc, Am, j., 41:677-681.
- [4] Jahring, 2016, *The Application of Dual Reciprocity Boundary Element Method for Steady Infiltration Problems in the Periodic Channel with Impermeable Layer*, Journal of Math Sciences (JMS). 1.2;28-34.
- [5] Lobo, M., 2008, *Boundary Element Methods for A Class of Infiltration Problems*, PhD Tesis, Adelaide University.
- [6] Solekudin, I., Ang, K.C., 2013, *A Dual-Reciprocity Boundary Element Method for Steady Infiltration Problems*, ANZIAM J. 54:171-180.
- [7] Warrick, A.W., 2001, *Soil Physics Companion*, CRC Press LLC, Boca Raton.